УДК 514(075.8):81(075.8)

Ирина Владимировна Прояева,
Алия Дамировна Сафарова
г. Оренбург

Некоторые свойства аффинных преобразований плоскости

В данной статье рассмотрены особенности изучения одного из красивейших преобразований плоскости - аффинного, практически не изучаемого в курсе геометрии средней школы. Основное внимание в работе авторы акцентируют внимание на свойствах аффинного преобразования. Важность и трудность изучения теории аффинного преобразования связана в первую очередь с многогранностью и вариативностью как таковых. В статье представлена классификация аффинных преобразований по различным признакам. Особое внимание уделяется общей идеи применения теории к решению задачи. Представленная в статье методика введения основных методов изучения данного вопроса была реализована в конкретном учебном процессе на занятиях по курсу «Геометрия» в Оренбургском государственном педагогическом университете при подготовке будущих бакалавров по направлению «Педагогическое образование» и позволила повысить эффективность усвоения изучаемого материала обучающимися.

Ключевые слова: аффинное преобразование, прямая, коллинеарность точек, фигура на плоскости.

Irina Vladimirovna Proyaeva,
Aliya Damirovna Safarova
Orenburg

Some properties of affine transformations of the plane

This article discusses the features of studying one of the most beautiful transformations of the plane - the affine one, which is practically not studied in the course of high school geometry. The authors focus on the properties of the affine transformation. The importance and difficulty of studying the theory of affine transformation is primarily related to the versatility and variability as such. The article presents a classification of affine transformations by various characteristics. Special attention is paid to the General idea of applying the theory to the problem solution. The method of introduction of the main methods of studying this issue presented in the article was implemented in a specific educational process in the course "Geometry" at the Orenburg state pedagogical University in the preparation of future bachelors in the direction of "Pedagogical education" and allowed to increase the efficiency of mastering the material studied by students.

Keywords: affine transformation, straight line, collinearity of points, shape on the plane.

Знание геометрических преобразований плоскости, свойств этих преобразований и умение применять их при решении задач является значимым элементом математической культуры студентов и школьников [1]. Применение различных видов преобразований позволяет найти грани соприкосновения математики с физикой, химией, биологией, техникой. Понятия и факты геометрии постоянно применяются при решении практических задач [2]. Решая задачи, приходится не только делать чертежи и применять теоремы, но и, сопоставив алгебраические или иные формулы с геометрическими фактами, увидеть геометрическое решение задачи. Суть метода геометрических преобразований состоит в построении модели одной теории (в нашем случае традиционной евклидовой геометрии) в объектах другой (группы геометрических преобразований).

Отдельные виды геометрических преобразований встречаются еще в древности. С шестнадцатого века стали быстро развиваться геометрические исследования о преобразованиях, получивших впоследствии наименование аффинные. Аффинная геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантных при любых аффинных преобразованиях, создавалась в трудах немецких математиков А.Ф. Мебиуса (1790 г. – 1868 г.), Ю. Плюккера (1801 г. – 1868 г.), английского ученого И. Ньютона (1642 г. – 1727 г.). Особенно важны работы таких крупных математиков, как Л. Эйлер (1707 г. – 1783 г.), А.К. Клеро (1713 г. – 1765 г.), Н.И. Лобачевский (1792 г. – 1856 г.). К семидесятым годам девятнадцатого века накопилось много сведений относительно разных геометрических преобразований. Актуальной стала задача их классификации и общей систематизации. Эту задачу выполнил немецкий математик Ф. Клейн (1927 г. – 2019 г.), который положил в основу классификации геометрических преобразований и соответствующих ветвей геометрии понятие группы.

В природе и технике мы постоянно встречаемся с явлениями, в процессе которых те или иные объекты меняют свою форму, размеры или расположение в пространстве. Изучая преобразования какой-либо фигуры, их не рассматривают как протекающий во времени процесс, а ограничиваются рассмотрением и сопоставлением исходной фигуры F и фигуры $F^{|}$ которая возникает в результате преобразования.

Рассмотрим преобразование плоскости, при котором вместе с преобразованием плоскости осуществляется преобразование всех фигур, лежащих на ней.

Преобразованием плоскости называется биективное отображение плоскости на себя. Справедлива теорема: «Множество преобразований плоскости образует группу относительно композиции преобразований» [3].

Подгруппой группы преобразований является группа аффинных преобразований плоскости. Подгруппой группы аффинных преобразований является группа подобий плоскости. В группу подобий как подгруппы входят: а) группа подобий первого рода, подгруппойкоторой является группа гомотетий с общим центром; в) группа движений плоскости, подгруппой которой является группа движений первого рода, которая состоит из группы параллельных переносов и группы поворотов с общим центром.

Геометрия – это наука, изучающая такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях некоторой группы. Таким образом, аффинную геометрию на плоскости можно определить как теорию, изучающую свойства фигур, которые сохраняются при аффинных преобразованиях плоскости.

Преобразование подобие (в том числе и движение) является, в известном смысле, простейшим преобразованием плоскости. Сохраняятакие свойства фигур, как величину угла, отношение длин отрезков и другие, подобие является в тоже время сравнительно «слабым» преобразованием: подобие квадрат переводит только в квадрат, окружность – в окружность. Рассмотрим более «сильные» преобразования. Единственным требованием, предъявляемым к этим преобразованиям, будет преобразование прямой в прямую. Такого рода преобразования играют большую роль в теории и практике изображения пространственных фигур на плоскости.

Преобразование аффинной плоскости, отображающее три коллинеарные точки на три коллинеарные точки, называется аффинным. Можно доказать, что преобразование, сохраняющее коллинеарность точек, оставляет неизменным простое отношение трех точек. Это утверждение называется теоремой Дарбу. Поэтому введем следующее определение аффинных преобразований. Аффинным преобразованием плоскости называется такое преобразование плоскости, которое сохраняет коллинеарность точек и простое отношение трех точек. Можно доказать, что существует и притом единственное аффинное преобразование плоскости, преобразующее три произвольно заданные неколлинеарные точки соответственно в три произвольнозаданные три неколлинеарные точки. Поэтому любое аффинное преобразование плоскости может быть задано указанием тройки точек, не лежащих на одной прямой, и их образов при данном аффинном преобразовании [4].

Аффинные преобразования плоскости обладают следующими свойствами:

1) аффинное преобразование отображает три точки, не лежащие на одной прямой, в три точки, не лежащие на одной прямой;

2) аффинное преобразование сохраняет порядок расположения точек на прямой;

3) аффинное преобразование преобразует прямую в прямую, отрезок в отрезок, луч в луч, полуплоскость в полуплоскость;

4) аффинное преобразование отображает параллельные прямые в параллельные прямые;

5) аффинное преобразование сохраняет отношение параллельных отрезков;

6) аффинное преобразование преобразует пересекающиеся прямые в пересекающиеся прямые, и точку пересечения пересекающихся прямых – в точку пересечения их образов;

7) для любых двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$существует и притом единственное аффинное преобразование, которое точки A,B,C, переводит в точки $A_{1,}B_{1,}C_1$ соответственно;

8) аффинные координаты точки инвариантны относительно аффинных преобразований плоскости;

9) отношение площадей двух аффинных фигур сохраняет свое значение при любом аффинном преобразовании;

10)любое аффинное преобразование либо сохраняет, либо меняет ориентацию плоскости.

Аффинное преобразование называется преобразованием первого рода, если оно не меняет ориентацию плоскости, и преобразованием второго рода, если оно меняет ориентацию плоскости. Из определения и свойств аффинного преобразования следует, что подобие и движение плоскости относятся к аффинным преобразованиям.

Аффинные преобразования можно классифицировать по различным признакам. Рассмотрим классификацию аффинных преобразований по числу неподвижных (инвариантных) точек, то есть точек, которые совпадают со своими образами.

1) Существуют аффинные преобразования, не имеющие инвариантные точки. Примером такого преобразования является параллельный перенос. Преобразования этого вида называются свободно-аффинными.

2) Нетрудно убедиться, что аффинное преобразование, имеющее три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой, совпадает с тождественным преобразованием плоскости.

3) Существуют аффинные преобразования с одной неподвижной точкой. Например – поворот вокруг точки на ориентированный угол, или гомотетия. Аффинные преобразования, имеющие одну инвариантную точку, называются центроаффинными.

4) Существуют аффинные преобразования, отличные от тождественного преобразования, которые имеют по крайней мере две инвариантные точки. Такие преобразования называются перспективно-аффинными или родством. Можно доказать, что в этом случае любая точка, принадлежащая прямой, проходящей через неподвижные точки, является инвариантной точкой. То есть перспективно-аффинное преобразование имеет целую прямую неподвижных точек, которая называется осью родства. Пусть перспективно-аффинное пре-

образование задано осью и двумя соответственными точками A и A_1 при данном родстве. Если прямая AA_1 параллельная оси родства, то перспективно-аффинное преобразование называется сдвигом плоскости. Если прямая AA_1 не является прямой, параллельной оси родства, то родство называется косым сжатием. Обозначим точкой P - точку пересечения прямой AA_1 и оси родства, и $\overrightarrow{PA_1}=k\overrightarrow{PA}$. Число k является постоянным для данного перспективно-аффинного преобразования, $k \neq 0$ и называется коэффициентом сжатия. Если k=-1, то сжатие называется аффинной симметрией. Можно дать самостоятельное определение аффинной симметрии. Пусть x-некоторая прямая, a-прямая, пересекающая x. Зададим отображение плоскости на себя, при котором образ M_1 всякой точки M плоскости определяется так: MM_1 параллельна прямой a, MM_1 пересекает прямую x в точке P, то $\overrightarrow{PM_1}=\overrightarrow{PM}$, то есть точка P – середина отрезка MM_1. Такое преобразование плоскости называется аффинной симметрией, прямая x- осью симметрии, прямая a-направлением симметрии.

Таким образом, любое аффинное преобразование плоскости, отличное от тождественного преобразования, либо не имеет инвариантных точек, либо имеет одну инвариантную точку, либо целую прямую неподвижных точек.

Идея применения преобразований плоскости к решению задач состоит в следующем. Фигуру, заданную в задаче, с помощью некоторого преобразования преобразуют в фигуру, для которой эта задача имеет более простое решение. Затем полученные результаты переносят на данную фигуру, применив преобразование, обратное рассмотренному преобразованию. Аффинные преобразования обладают по сравнению с движением и подобием наибольшими возможностями, так как позволяют данный треугольник преобразовать в любой другой треугольник. Поэтому произвольный параллелограмм АВСД можно преобразовать в квадрат. Для этого надо задать аффинное преобразование так, чтобы треугольник ABC преобразовался в равнобедренный, прямоугольный треугольник. Аффинное преобразование позволяет преобразовать любую трапецию АВСД в равнобедренную трапецию $A_1B_1C_1Д_1$. Для этого надо треугольник ABE, где точка E-точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны АД и BC трапеции АВСД, преобразовать в равнобедренный треугольник $A_1B_1E_1$, где точка E_1- точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны $A_1Д_1$ и B_1C_1 трапеции $A_1B_1C_1Д_1$.Очевидно, что с помощью аффинных преобразований можно решать только задачи, которые связаны с аффинными свойствами фигур. Рассмотрим пример решения задачи с помощью аффинных преобразований [5].

Задача 1

Дано: ABC- треугольник, точки A_1,B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB в одном и том же отношении. Точка P является точкой пересечения медиан треугольника ABC, точка P_1- точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, точка P_2- точкой пересечения медиан треугольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1.

Доказать: $P \equiv P_1 \equiv P_2$.

Доказательство. Пусть аффинное преобразование задано точками A, B, C и их образами B, C, A. Тогда треугольник ABC перейдет в треугольник BCA (рис.1)

Аффинное преобразование сохраняет простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой. Поэтому точка P является инвариантной точкой данного преобразования. Рассмотренное аффинное преобразование треугольник $A_1B_1C_1$ переводит в треугольник $B_1C_1A_1$, и точка P_1 так же является инвариантной точкой. Прямые AB и BC соединяют соответственные точки аффинного преобразования и данные прямые не являются параллельными. Поэтому построенное аффинное преобразование не является родством, следовательно не может иметь две различные инвариантные точки, и точки P и P_1 совпадают. Так как образом точки B является точка C, образом точки B_1- точка C_1, то прямая BB_1 переходит в прямую CC_1. Аналогично образом прямой CC_1 является прямаяAA_1, образом прямой AA_1 является прямая BB_1. Поэтому точка P_2 так же инвариантная точка рассматриваемого преобразования, следовательно совпадает с точками P и P_1.

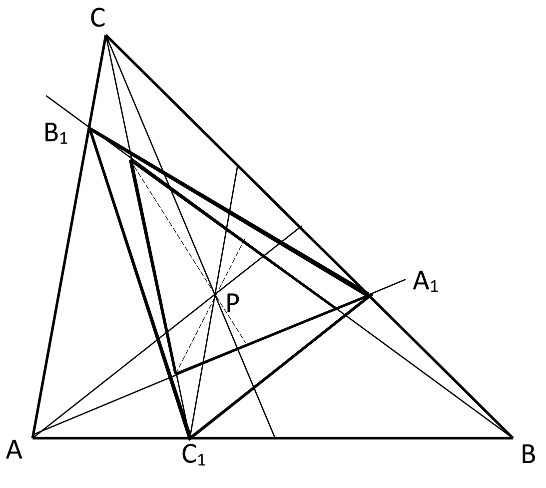

Рис. 1. Чертеж к задаче

Рассмотренное в статье аффинное преобразование и его особые свойства находят применение в различных областях науки и техники, особенно его свойства необходимы для изучения отдельных вопросов теоретической механики, что подчеркивает актуальность изучения данных вопросов в Вузе. Тема, с одной стороны, выходящая за рамки основного школьного курса, а с другой стороны тесно с ним переплетающаяся. К особым ее достоинствам можно отнести, пожалуй, тот факт, что она связывает все преобразования в единое целое.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразоват. организаций / Л. С. Атанасян [и др.]. – 2-е изд. – Москва : Просвещение, 2014. – 383 с. : ил. – Текст : непосредственный.
2. Геометрия. 5-9 классы : рабочая прогр. к линии учебников И. Ф. Шарыгина – URL: http://drofa-ventana.ru/upload/iblock/ee5/ee5637efac8548ecf6c9b985c7fa7ff1.pdf. – Текст : электронный.
3. Прояева, И.В. Об особенностях преподавания раздела геометрических преобразований в школьном курсе геометрии / И.В. Прояева, А.Д. Сафарова. – Текст : непосредственный // Мир науки, культуры и образования. – 2017. – № 1(62). – С. 150-152.
4. Прояева, И.В. Компетентностный подход в преподавании математических дисциплин на инженерных специальностях / И.В. Прояева. – Текст : непосредственный // Материалы I Международной очно-заочной конференции. – Оренбург : ПГУТИ, 2015.
5. Прояева, И.В. Организация самостоятельной работы студентов по подготовке к ГИА курсу «Геометрия» / И.В. Прояева, А.Д. Сафарова. – Оренбург : Изд-во ОГПУ, 2016. – Текст : непосредственный.

REFERENCES

1. Atanasjan L.S., et al. Geometrija. 7-9 klassy: uchebnik dlja obshheobrazovat. organizacij [Geometry. 7-9 grades]. Moscow: Prosveshhenie, 2014. 383 p.: il.
2. Geometrija. 5-9 klassy: rabochaja progr. k linii uchebnikov I. F. Sharigina [Elektronnyi resurs] [Geometry. 5-9 grades]. URL: http://drofa-ventana.ru/upload/iblock/ee5/ee5637efac8548ecf6c9b985c7fa7ff1.pdf.
3. Projaeva I.V., Safarova A.D. Ob osobennostjah prepodavanija razdela geometricheskih preobrazovanij v shkol'nom kurse geometrii [On the peculiarities of teaching the section of geometric transformations in the school geometry course]. *Mir nauki, kul'tury i obrazovanija* [*The world of science, culture and education*], 2017, no. 1(62), pp. 150-152.
4. Projaeva I.V. Kompetentnostnyj podhod v prepodavanii matematicheskih disciplin na inzhenernyh special'nostjah [Competence approach in teaching mathematical disciplines in engineering specialties]. *Materialy I Mezhdunarodnoj ochno-zaochnoj konferencii* [*Materials of the I International intramural conference*]. Orenburg: PGUTI, 2015.
5. Projaeva I.V., Safarova A.D. Organizacija samostojatel'noj raboty studentov po podgotovke k GIA kursu «Geometrija» [Organization of independent work of students in preparation for the State Final Cirtification course “Geometry”]. Orenburg: Izd-vo OGPU, 2016.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

И.В. Прояева, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет им. В.П. Чкалова»; Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Оренбургский филиал), г. Оренбург, Россия, e-mail: docentirina@mail.ru, ORCID: 0000-0002-2005-8336.

А.Д. Сафарова, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный педагогический университет им. В.П. Чкалова», г. Оренбург, Россия, e-mail: aliya.safarova.66@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS:

I.V Proyaeva, Ph. D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Orenburg State Pedagogical University named after V. P. Chkalov; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Orenburg branch), Orenburg, Russia, e-mail: docentirina@mail.ru, ORCID: 0000-0002-2005-8336.

А.Д. Сафарова, Ph. D. in Pedagogy, Associate Professor, Orenburg State Pedagogical University named after V.P. Chkalov, Orenburg, Russia, e-mail: aliya.safarova.66@mail.ru.