ВЕСТНИК ШАДРИНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. – 2021. – №2(50). – С. 131-135

УДК 373.4 DOI 10.52772/25420291_2021_2_131

**Татьяна Александровна Оболдина**
г. Шадринск

## Некоторые вопросы изучения элементов теории делимости в школьном курсе

В статье рассмотрен актуальный вопрос изучения теории делимости в курсе школьной математики. Не смотря на достаточно простой теоретический и практический материал из раздела элементарной математики, практика обучения теории делимости в современной школе не является целостной структурой и имеет ряд значительных замечаний. При этом знания рассматриваемой теории необходимы учащимся на протяжении всего школьного курса и требуют пристального внимания. Изучение данного вопроса показывает, что знания элементарной теории чисел необходимы для решения олимпиадных заданий по математике для учащихся с пятых по одиннадцатый классы. Кроме того, достаточно сложные задачи содержатся в ЕГЭ по математике на профильном уровне и в содержании итоговой аттестации по математике за курс средней школы. В работе более подробно представлен теоретический материал из теории делимости необходимый для более качественного изучения данного раздела в старших классах на уроках или во внеурочной деятельности. Автор предлагает решения некоторых базовых задач из рассматриваемой теории, ссылаясь на известные математические утверждения.

**Ключевые слова:** курс школьной математики, теория целых чисел, теория делимости, простые, составные числа.

**Tatyana Alexandrovna Oboldina**
Shadrinsk

## Some questions of studying the elements of the theory of divisibility in the school course

The article describes the actual issue of studying the theory of divisibility in the course of school mathematics. Despite a fairly simple, theoretical and practical material from the section of elementary mathematics, the practice of learning the theory of divisibility in the modern school is not a holistic structure and has a number of significant comments. At the same time, the knowledge of the theory under consideration is necessary for students throughout the school course and require close attention. The study of this issue shows that the knowledge of the elementary theory of numbers is necessary to solve the Olympiad tasks in mathematics for students from the fifths of the eleventh grades. In addition, quite complicated tasks are contained in the Unified State Examination of mathematics at the relevant level and in the content of the final certification of mathematics for the secondary school. In more detail, theoretical material from the theory of divisibility is presented in more detail for a better study of this section in high schools in lessons or in extracurricular activities. The author offers solutions to some basic tasks from the theory under consideration, referring to well-known mathematical statements.

**Keywords:** school mathematics course, integer theory, divisibility theory, prime, composite numbers.

Множество математических разделов тесно связано с различными вопросами теории чисел. Не менее важную роль играют, по сей день, изложенные теоретические и практические выкладки пифагорейскими философами основ делимости чисел. Именно благодаря им современности известны простые, составные, совершенные, дружественные, фигурные числа и др. [3]. Философы и ученые Древней Греции внесли неоценимый вклад в развитие математики, представив типологию натуральных чисел, рассмотрев множество натуральных чисел как классы [1]. Нельзя не упомянуть и Евклида. В его «Началах» представлена вся теоретическая часть данного раздела, в том числе всем известные основные свойства делимости целых чисел, теорема о бесконечности простых чисел, алгоритм для определения наибольшего общего делителя двух чисел и т.д. [2].

В настоящее время к вопросам элементарной теории чисел обращались многие математики, а также все авторы учебников, задачников и методических пособий по математике для школ и вузов: В.М. Брадис, Е.А. Бунимович, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев, В.В. Козлов, А.Г. Мерзляк, А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Л.Г. Петерсон, И.Ф. Шарыгин и др. Исследования, теоретические и практические рекомендации по проблемам изучения теории делимости чисел на уроках математики представлены в работах В.Г. Болтянского, И.М. Виноградова, В.А. Далингера, Д. Пойа, Г.И. Саранцева, А.А. Столяра и др.

Не смотря на большое внимание к данному вопросу, практика обучения элементарной теории чисел, в частности теории делимости, на современном этапе имеет значительные нарекания и не является целостной структурой. Напомним, что в школьном курсе математики содержатся две темы «Делимость натуральных чисел» и «Делимость чисел», которые включены в программу по математике для 5-6 классов и затем представлены частично в курсах «Алгебра» основной школы и «Алгебра и начала анализа» в 10-11 классах. Знания данной теории востребованы учащимися и требуют особого внимания. Задачи, решаемые с помощью элементарной теории чисел, традиционно содержатся в олимпиадах по математике для школьников на разных этапах их проведения. Также еще более сложного уровня подобные задачи содержатся в ЕГЭ по математике на профильном уровне и уже 6 лет подряд включены в содержание итоговой аттестации по математике за курс средней школы на базовом уровне.

В этой связи рассмотрим более подробно теоретический материал из теории делимости, который необходим, на наш взгляд, для более качественного изучения данного раздела в старших классах либо на уроках, либо во внеурочной деятельности.

Для начала необходимо научить учащихся располагать списком простых чисел, определять является ли произвольное число простым или составным, для составного числа уметь находить его нетривиальные делители.

Рассмотрим три способа.

Первый. Воспользуемся теоремой 1: Наименьший простой делитель составного числа c не превосходит $\sqrt{c}$.

Допустим, что *c* = *a* · *b* тогда при соответствующем разложении на множители *a* и *b* не будут больше, чем $\sqrt{c}$. В противном случае получится что $a \cdot b > \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} = c$. Это противоречие. Следовательно, для определения имеет ли число *c* делитель, достаточно проверить, делится ли данное число *c* на простые числа, не превосходящие $\sqrt{c}$.

*Пример* 1. Определить, является ли число *c* = 231 составным.

Для числа *c* = 231 целая часть выражения $\sqrt{c}$ = 15 Простые числа до 15 это: 2, 3, 5, 7, 11. Проверяя делимость исходного числа на эти простые числа, находим, что 231= 3·7·11, т.е. число составное.

*Пример* 2. Определить, является ли число *c* = 929 составным.

Для числа *c* = 929 целая часть выражения $\sqrt{c}$ = 30. Проверяя делимость исходного числа на простые числа до 30 выясняем, что таких нет, следовательно, число 929 является простым.

Второй способ – это применение таблиц простых чисел. Определение простых чисел возможно до 10 000 000 по таблице Д.Х. Лемера.

Третий способ с помощью «решета Эратосфена», который также основан на выше рассмотренной теореме 1.

*Пример* 3. Определить, является ли число *c* = 29 составным.

Наименьший простой делитель составного числа *c* не превосходит $\sqrt{29} = 5$. Следовательно, нужно проверить простые делители 2; 3 и 5.

1. Выпишем все числа из натурального ряда до 29:
1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29.

2. Вычеркнем число 1:
~~1~~;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20; 21; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 28; 29.

3. Вычеркнем числа кратные 2, кроме самого числа 2:
~~1~~;2;3;~~4~~;5;~~6~~;7;~~8~~;9;~~10~~;11;~~12~~;13;~~14~~;15;~~16~~;17;~~18~~;19;~~20~~; 21; ~~22~~; 23; ~~24~~; 25; ~~26~~; 27; ~~28~~; 29.

4. Вычеркнем числа кратные 3, кроме самого числа 3:
~~1~~;2;3;~~4~~;5;~~6~~;7;~~8~~;~~9~~;~~10~~;11;~~12~~;13;~~14~~;~~15~~;~~16~~;17;~~18~~;19;~~20~~; ~~21~~; ~~22~~; 23; ~~24~~; 25; ~~26~~; ~~27~~; ~~28~~; 29.

5. Вычеркнем числа кратные 5, кроме самого числа 5:
~~1~~;2;3;~~4~~;5;~~6~~;7;~~8~~;~~9~~;~~10~~;11;~~12~~;13;~~14~~;~~15~~;~~16~~;17;~~18~~;19;~~20~~; ~~21~~; ~~22~~; 23; ~~24~~; ~~25~~; ~~26~~; ~~27~~; ~~28~~; 29.

Итак, нашли 10 простых чисел из натурального ряда до 29: 2;3;5;7;11;13;17;19;23; 29.

Из этого ряда 29 только на 29. Следовательно, число 29 является простым.

Можно «решето Эратосфена», представить в виде таблицы1 и также последовательно вычеркивать числа кратные 2; 3 и 5 кроме их самих. Например, для нашей задачи:

Таблица 1.

Ряд целых чисел до 29

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ |
| ~~9~~ | ~~10~~ | 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ |
| 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ | ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ |
| ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | | | |

Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Способы первый и второй позволяют работать только с достаточно небольшими числами. Если число велико, то пользуются таблицей простых чисел или теоремой 1 на основе следующего утверждения.

Если $n = k \cdot l$, где $k = p \cdot q$, а $l < p < k$, то *p* – делитель числа *n*, меньший, чем *k*.

*Пример* 4. Разложить на простые множители *n* = 22451.

На 2, 3, 5, 7 число *n* не делится, но делится на 11 (признак делимости на 11). Делим и получаем, что 22451 = 11* 2041. Заметим, что 2041 на 11 не делится.

Найдем делители числа 2041. Из того, что $48^2 < 2041 < 49^2$, следует, что искомый простой делитель, возможно, будет среди простых чисел от 13 до 47. Число 2041 делится на 13 по признаку 41-2=39. 39 делится на 13.

Итак: 22451= 11 * 13 * 157. Рассмотрим число 157. Известно, что $13^2 > 157$, причем все простые числа, меньшие 13, не делители данного числа, тогда 157 - простое число. 22451= 11 * 13 * 157 – искомое разложение на простые множители.

Рассмотрим метод, не требующий перебора всевозможных его простых делителей (метод Ферма).

Для этого нам понадобится формула суммирования последовательных нечётных чисел. Запишем несколько равенств:

$1^2 = 1$,

$2^2 = 1 + 3$,

$3^2 = 1 + 3 + 5$,

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$,

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$.

Или в общем виде $n^2 = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ для любого натурального *n*.

Данную зависимость можно записать из формулы суммы первых *n* натуральных чисел

$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{n}$, наглядная иллюстрация, которой представлена на рисунке 1, при $n = 4$.

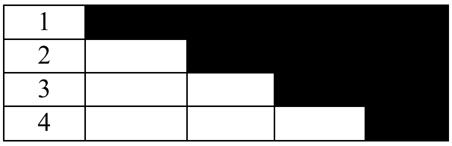


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация примера при $n=4$.

Сумма $1 + 2 + 3 ... + n$ равна площади ступенчатой белой фигуры.

Выполним дополнительное построение. Пристроим к данной фигуре такую же, но только перевёрнутую (это чёрная фигура). В результате имеем прямоугольник со сторонами $n$ и $(n+1)$. Площадь прямоугольника равна $n(n + 1)$, тогда площадь его половины будет $\frac{n(n+1)}{2}$.

Используем формулу суммы нечётных чисел.

К $1 + 3 + ... +(2n-1)$ прибавим сумму последовательных чисел:

$1 + 3 + ... + (2n - 1)+(2 + 4 + ...+ (2n-2))= \frac{(2n-1)2n}{2} =n(2n-1)$.

В результате получим $n(2n-1) - 2b(n-1)/ 2 = n^2$.

Данное равенство $1 + 3 + ... +(2n-1) = n^2$ можно доказать методом математической индукции.

Пусть равенство верно при $n = 1$.

Предположим, что для некоторого $k$ верно равенство

$S_k = 1 + 3 + ... +(2k-1) = k^2$, следовательно

$S_{k+1} = S_k +(2k+1)= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Итак, равенство справедливо для всех натуральных $n$.

Рассмотрим суть метода Ферма.

Пусть дано нечётное натуральное число n, где n > 3. Необходимо последовательно прибавлять к нему нечётные числа *1, 3, 5,* и т. д., пока не получим квадрат некоторого числа $X$:

$n + 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k-1) = X^2$.

По выше рассмотренной формуле $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$, тогда разложение числа $n$ будет $n = X^2 – k^2 = (X - k)(X + k)$.

*Пример* 5. Число 1334 разложить на множители.

Заметим, что число делится на 2, т.е. 1334 = 2*667.

Рассмотрим число 667. Воспользуемся методом Ферма для отыскания делителей числа 667:

667+1 = 668;

667 +1+3 = 671;

667 + 1 + 3 + 5 = 676 = $26^2$.

Тогда 667 = $26^2$-$3^2$ или 667= (26-3)(26+3), следовательно, 667 = 23*29.

Тогда, 1334 = 2*23*29

Продемонстрируем использование основной теоремы арифметики.

Любое натуральное число n, где n > 1, представимо в виде произведения простых сомножителей, причем два таких разложения могут отличаться только порядком следования сомножителей.

*Пример* 6. Число 76230 записать в виде канонического разложения на простые множители.

Запишем данное число слева, и через вертикальную черту будем последовательно делить его на простые числа. Начинают всегда проверять с наименьшего простого числа 2. Если деление выполнилось один раз, то необходимо проверить возможность деления повторно. Процесс разложения на множители данного числа принято представлять в виде:

$$\begin{array}{r|l} 76230 & 2 \\ 38115 & 3 \\ 12705 & 3 \\ 4235 & 5 \\ 847 & 7 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

76230 = $2^1*3^2*5^1*7^1*11^2$

Используя каноническое разложение натурального числа $n =p_1^{k1}p_2^{k2} ... p_s^{ks}$, можно определить все делители числа $n$.

Все делители числа n имеют вид $d = p_1^{L1}p_2^{L2} ... p_m^{Lm}$. Показатель степени $L_i$, принимает значение от 0 до $k_i$, $i = 1, ..., m$.

Если $L_i < k_i$ хотя бы для одного $i$, то делитель будет собственным делителем числа $n$ (т.е. меньшим $n$).

Рассмотрим алгоритм нахождения всех делителей данного числа [3]:

1. Изобразить вертикальную линию.
2. Записать слева от линии все степени простых множителей числа $a$ в отдельные строки, причем первую строку начать с 1.
3. Выписать справа весь ряд чисел первой строки.
4. Выписать справа произведения каждого из чисел первой строки на каждое из чисел второй строки.
5. Выписать справа произведения всех уже записанных делителей на каждое из чисел третьей строки.
6. Далее к этому ряду вновь приписать справа произведения каждого из ранее записанных делителей на каждое из чисел четвертой строки.

*Пример* 7. Пусть дано число А=$a^2b^3c$, где $a,b,c$ - простые числа.

| | |
|---|---|
| $1, a, a^2$ | $1, a, a^2,$ |
| $b,\ b^2,\ b^3$ | $b, ab, a^2b, b^2, ab^2, a^2b^2, b^3, ab^3, a^2b^3$ |
| $c$ | $c, ac, a^2c, bc, abc, a^2bc, b^2c, ab^2c, a^2b^2c, b^3c, ab^3c, a^2b^3c.$ |

Количество делителей можно проверить по теореме 3.

Теорема 3. Число всех делителей составного числа равно произведению, полученному от перемножения показателей степени простых множителей разложения этого числа, увеличенных каждый на единицу, т.е. А=$p_1^{\alpha 1}$. $p_2^{\alpha 2}$. ... .$p_n^{\alpha n}$, то число А имеет $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_n+1)$ делителей.

Таким образом, число А=$a^2b^3c$ имеет 24 делителя, так как (2+1)(3+1)(1+1)=3*4*2=24 делителей.

Из формулы А=$p_1^{\alpha 1}$. $p_2^{\alpha 2}$. ... .$p_n^{\alpha n}$, следует, что число *А*, содержащее нечётное число делителей, будет квадратом натурального числа. Обратное так же верно, так как все показатели в каноничном разложении числа *n* будут чётными.

*Пример* 8. Найдите все делители числа 3300.
Представим число в каноническом виде:

| | |
|---|---|
| 3300 | 2 |
| 1650 | 2 |
| 825 | 3 |
| 275 | 5 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

3300=$2^2$*3*$5^2$*11, тогда число 3300 должно иметь (2+1)(1+1)(2+1)(1+1)=3*2*3*2=36 делителей.

Составим ряд этих делителей:

| | |
|---|---|
| 1, 2, 4 | 1, 2, 4, |
| 3 | 3, 6, 12, |
| 5,25 | 5, 10, 20, 15, 30, 60, 25, 50, 100, 75, 150, 300, |
| 11 | 11, 22, 44, 33, 66, 132, 55, 110, 220, 165, 330, 660, 275, 550, 1100, 825, 1650, 3300. |

*Пример* 7. Для числа 992 найти все его делители и сумму собственных делителей.

Выполним разложение числа *992* на простые множители:

$992 = 2^5 * 31.$

Тогда собственные делители:

$1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32$, и $31, 2 * 31 = 62, 4 * 31 = 124, 8 * 31 = 248,$

$16 * 31 = 496, 32 * 31 = 992.$

Найдем сумму собственных делителей:

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 31 + 2 * 31 + 4 * 31 + 8 * 31 + 16 * 31 = (1 + 31) + (2 + 2 * 31) + (4 + 4 * 31) + (8 + 8 * 31) + (16 + 16 * 31) = 32 * (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 8 = 32 * 31 = \underline{992}$ .

В данной статье рассмотрена лишь малая часть теоретического материала из теории делимости, которая будет полезна при изучении школьной математики. Нет ни малейшего сомнения, что задачи элементарной теории чисел содержат огромный образовательный и развивающий потенциал для учащихся. Одной из важных особенностей раздела является доступность и относительная простота в понимании для учащихся, начиная с 6 класса. С другой стороны ряд задач не решаются по известным алгоритмам. Для решения таких задач необходимо при решении использовать анализ, постановку гипотез, их проверку, применять аналитико-синтетические поисковые схемы. Предложенные дополнительные сведения из раздела теория делимости позволят учащимся качественно решать предложенные задачи из раздела теории чисел.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Зверкина, Г.А. История математики : учеб. пособие / Г.А. Зверкина. – Москва : МИИТ, 2005. – 108 с. – Текст : непосредственный.

2. Максимова, О.Д. История математики : учеб. пособие для вузов / О.Д. Максимова, Д.М. Смирнов. – 2-е изд., стер. – Москва : Юрайт, 2019. – 319 с. – URL: https://urait.ru/bcode/442136 (дата обращения: 03.04.2021). – Текст : электронный.

3. Оболдина, Т.А. Избранные вопросы теории целых чисел : учеб. пособие для бакалавров / Т.А. Оболдина ; Шадр. гос. пед. ун-т. – Шадринск : ШГПУ, 2017. – 64 с. – Текст : непосредственный.

REFERENCES

1. Zverkina G.A. Istorija matematiki: ucheb. posobie [The history of mathematics]. Moscow: MIIT, 2005. 108 p.

2. Maksimova O.D., Smirnov D.M. Istorija matematiki: ucheb. posobie dlja vuzov [The history of mathematics]. Moscow: Jurajt, 2019. 319 p. URL: https://urait.ru/bcode/442136 (Accessed 03.04.2021).

3. Oboldina T.A. Izbrannye voprosy teorii celyh chisel: ucheb. posobie dlja bakalavrov [Some issues on the theory of integers]. Shadrinsk: ShGPU, 2017. 64 p.

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:**

Т.А. Оболдина, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru ORCID: 0000-0002-5366-7381.

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR:**

T. A. Oboldina, Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics and Mathematics and Information Technology Education, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: Tatiana.oboldina@yandex.ru ORCID: 0000-0002-5366-7381